سامانه بانک تستی

FlowRax

ریاضی

Math

۱

$$\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{2-\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2}{2-1}=4-3\sqrt{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲

نکته: اگر n عددی زوج باشد، آنگاه:

$$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a & a\geq 0\\ -a & a<0\end{cases}$$

نکته: اگر n عددی فرد باشد، آنگاه:

$$\sqrt[n]{a^n}=a$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\frac{\sqrt[5]{x^5}\times\sqrt[8]{x^8}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{x\times|x|}{x}=|x|\overset{x<0}{=\!=}-x$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳

نکته: در مکعبی به ضلع a، حجم برابر a^3 و مساحت کل برابر $6a^2$ است.

طول ضلع مکعب را a در نظر می‌گیریم. طبق فرض حجم این مکعب برابر ۰/۰۲۷ است، پس:

$$a^3=0/027\Rightarrow a=\sqrt[3]{0/027}\Rightarrow a=\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}=\sqrt[3]{\frac{3^3}{10^3}}=0/3$$

بنابراین مساحت کل این مکعب برابر است با:

$$6a^2=6(0/3)^2=6(0/09)=0/54$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴

نکته (اتحاد مزدوج): $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

راه‌حل اول:

صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج، یعنی $1-\sqrt[4]{2}$ ضرب می‌کنیم.

$$A=\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt[4]{2}}\times\frac{1-\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt[4]{2}}=\frac{\cancel{(1-\sqrt{2})}(1-\sqrt[4]{2})}{\cancel{1-\sqrt{2}}}=1-\sqrt[4]{2}$$

راه‌حل دوم:

صورت کسر را با کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$A=\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt[4]{2}}=\frac{(1-\sqrt[4]{2})\cancel{(1+\sqrt[4]{2})}}{\cancel{1+\sqrt[4]{2}}}=1-\sqrt[4]{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵

نکته: هر عدد مثبت دارای دو ریشهٔ دوم است که قرینهٔ هم هستند.

نکته: اگر $0 < a < 1$، آنگاه:

$$a^n < \cdots < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \cdots < \sqrt[n]{a} \quad (n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq 2)$$

$0 < a < 1$ و می‌دانیم ریشهٔ دوم a دو عدد قرینه هستند به‌طوری که، $-\sqrt{a} < a < \sqrt{a}$. بنابراین z ریشهٔ دوم و مثبت a و x ریشهٔ دوم و منفی a است:

$$z = \sqrt{a}\ \ ,\ \ x = -\sqrt{a}$$

از طرفی:

$$0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a \xrightarrow{\text{با توجه به محور}} y = a^2$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x \cdot z = -\sqrt{a} \times \sqrt{a} = -a \\ y = a^2 \xrightarrow[0<a<1]{y>0} \sqrt{y} = a \end{cases} \Rightarrow xz + \sqrt{y} = -a + a = 0$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶

نکته: هرگاه $a > 0$، برای هر دو عدد طبیعی m و n، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

نکته: اگر $a > 0$، برای هر دو عدد طبیعی m و n داریم:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

ابتدا p را ساده می‌کنیم:

$$p = (2 \times A^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} \times (2 \times 3^3)^{\frac{1}{4}} \times (2A)^{\frac{1}{6}} \Rightarrow p = 2^{\frac{1}{3}} \times A^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times A^{\frac{1}{6}}$$

$$p = 2^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \times A^{\frac{1}{4}}$$

برای آنکه $p \in \mathbb{N}$ باشد، باید A عامل $2^{(4m+1)}$ و عامل $3^{(4n+1)}$ داشته باشد. $(m, n \in \mathbb{W})$. زیرا باید توان عامل‌های آن عدد طبیعی یا صفر شوند.

مثلاً اگر $m = n = 0$ باشد، داریم:

$$p = 2^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}} \Rightarrow p = 2 \times 3 = 6$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها، اگر $m = 1$ و $n = 0$، آنگاه $A = 2^5 \times 3^1 = 96$ و گزینهٔ ۱ جواب قابل‌قبول است.

دقت کنید اگر $A = 96$ باشد، آنگاه:

$$p = 2^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{5}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}} = 2^2 \times 3^1 = 12$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷

نکته: $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$ **(اتحاد چاق و لاغر)**

ابتدا داریم:

$$A = \frac{5}{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$$

اکنون مخرج کسر اول را با کمک اتحاد چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$A = \frac{5(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\cancel{5}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}{\sqrt[3]{3}(\cancel{2+3})} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

بنابراین خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$A^3 = \frac{4}{3} \Rightarrow A^3 - 1 = \frac{1}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۸

نکته: اگر عددی بزرگ‌تر از یک باشد، هرچه از آن ریشهٔ بزرگ‌تری گرفته شود، کوچک‌تر می‌شود.

نکته: اگر عددی بین صفر و یک باشد، هرچه از آن ریشهٔ بزرگ‌تری گرفته شود، بزرگ‌تر می‌شود.

نکته: اگر عددی بین صفر و منفی یک باشد، هرچه از آن ریشهٔ فرد بزرگ‌تری گرفته شود، کوچک‌تر می‌شود.

نکته: اگر عددی کوچک‌تر از منفی یک باشد، هرچه از آن ریشهٔ فرد بزرگ‌تری گرفته شود، بزرگ‌تر می‌شود.

با توجه به نکات بالا گزینهٔ ۳ پاسخ است؛ زیرا $\frac{1}{2}$ عددی بین صفر و یک است و هرچه از آن ریشهٔ بزرگ‌تری گرفته شود، بزرگ‌تر می‌شود، پس:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < \sqrt[5]{\frac{1}{2}}.$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۹

از معادلهٔ $x^2+15x+47=9y^2$ با فرض طبیعی بودن x و y نتیجه می‌گیریم که چون $9y^2$ مربع کامل است پس $x^2+15x+47$ هم مربع کامل است. از طرفی داریم:

$$\underbrace{x^2+14x+49}_{(x+7)^2} \le \underbrace{x^2+15x+47}_{(3y)^2} < \underbrace{x^2+16x+64}_{(x+8)^2}$$

پس تنها راه این است که $3y = x+7$ باشد و داریم:

$$x^2+15x+47 = x^2+14x+49 = (x+7) \Rightarrow x=2\,,\ y=3$$

و در نتیجه:

$$\log_x(y+1) = \log_2 4 = 2$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۰

پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای داریم:

$$a = \sqrt[3]{9} - 1 \Rightarrow a+1 = \sqrt[3]{9} \xrightarrow{\text{توان } 3} (a+1)^3 = 9$$

$$\Rightarrow a^3+3a^2+3a+1 = 9 \Rightarrow a^3+3a^2+3a = 8 \quad (1)$$

گام دوم: خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$a(a^2+3a+3) = a^3+3a^2+3a \overset{(1)}{=} 8$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۱ پاسخ تشریحی **گام اول**: عبارت زیر رادیکال سمت چپ، مربع کامل است:

$$۱۲-۶\sqrt{۳}=۹+۳-۲\times۳\times\sqrt{۳}=(۳-\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow \sqrt{۱۲-۶\sqrt{۳}}=\sqrt{(۳-\sqrt{۳})^۲}=|۳-\sqrt{۳}|=۳-\sqrt{۳}$$

گام دوم: مخرج کسر سمت راست را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱-۳\sqrt{۳}}{۴+\sqrt{۳}}\times\frac{۴-\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}}=\frac{۴-\sqrt{۳}-۱۲\sqrt{۳}+۹}{۱۶-۳}=\frac{۱۳-۱۳\sqrt{۳}}{۱۳}=۱-\sqrt{۳}$$

گام سوم: حالا داریم:

$$A=\sqrt{۱۲-۶\sqrt{۳}}+\frac{۱-۳\sqrt{۳}}{۴+\sqrt{۳}}=۳-\sqrt{۳}+۱-\sqrt{۳}=۴-۲\sqrt{۳}$$

گام چهارم: با کمی دقت متوجه می‌شویم که A مربع کامل است:

$$A=۴-۲\sqrt{۳}=۳+۱-۲\sqrt{۳}\times۱=(\sqrt{۳}-۱)^۲$$

گام پنجم: ریشه‌های دوم عدد A، برابر $\pm\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^۲}$ می‌شوند که واضح است ریشهٔ دوم بزرگ‌تر، مقدار مثبت، یعنی برابر $\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^۲}=\sqrt{۳}-۱$ می‌شود.

گام ششم: عبارت $\sqrt{۳}-۱$ در بین گزینه‌ها نیست! این‌جا دو روش داریم:

روش اول: امتحان گزینه‌ها

(۱) و (۲) که واضحاً با $\sqrt{۳}-۱$ برابر نیستند! سراغ (۳) و (۴) می‌رویم؛ با گویاکردن مخرج کسر داریم:

$$(۳): \frac{۲}{\sqrt{۳}+۱}\times\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۲(\sqrt{۳}-۱)}{۳-۱}=\frac{\cancel{۲}(\sqrt{۳}-۱)}{\cancel{۲}}=\sqrt{۳}-۱ \checkmark$$

$$(۴): \frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}\times\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۳-۱}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲} \times$$

بنابراین جواب (۳) می‌شود.

روش دوم: $\sqrt{۳}-۱$ را در $\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$\sqrt{۳}-۱\times\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۳-۱}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۲}{\sqrt{۳}+۱}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۲ پاسخ تشریحی **گام اول**: دو معادلهٔ داده‌شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}a(a^۲+۳ab)=۱۷\\ b(b^۲+۳ab)=۱۰\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}a^۳+۳a^۲b=۱۷\\ b^۳+۳ab^۲=۱۰\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{جمع}} a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳=۲۷$$

گام دوم: سمت چپ این معادله، اتحاد مکعب دوجمله‌ای است، پس:

$$\Rightarrow (a+b)^۳=۲۷\xrightarrow{\text{فرجه ۳}} a+b=۳$$

گام سوم: در آخر کافی است طرفین معادلهٔ بالا را به توان ۲ برسانیم:

$$\Rightarrow (a+b)^۲=۹$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۳ پاسخ تشریحی **گام اول**: از اتحاد مکعب دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳=a(a^۲+۳ab)+b(b^۲+۳ab)$$

$$\underbrace{=۱۷+۱۰}_{\text{ازصورت‌سؤال}}=۲۷ \Rightarrow (a+b)^۳=۲۷ \Rightarrow a+b=۳$$

گام دوم: بنابراین $(a+b)^۲=۳^۲=۹$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۴

$$A=\sqrt[3]{3^2\times 3^{\frac{1}{2}}}\times 3^{-\frac{2}{3}}\times (2^3)^{-\frac{2}{3}}\qquad \Rightarrow A=3^{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}\times 2^{-2}=3^{\frac{1}{6}}\times 2^{-2}\qquad \Rightarrow \frac{1}{4A}=\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۵

$$\sqrt[3]{a}=16=2^4 \rightarrow a=2^{12}$$

ریشهٔ چهارم a به صورت $\sqrt[4]{a}$ یا $-\sqrt[4]{a}$ می‌باشد. بنابراین:

$$b=\pm\sqrt[4]{a}=\pm\sqrt[4]{2^{12}}=\pm 2^3=\pm 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}-b=\begin{cases}\sqrt{2^{12}}-8=64-8=56\\ \sqrt{2^{12}}+8=64+8=72\end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۶

توجه کنید که:

$$a=2\sqrt[3]{3}\Rightarrow a^3=8\times 3=24$$

$$b=3\sqrt[3]{2}\Rightarrow b^3=27\times 2=54$$

$$c=\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\Rightarrow c^3=\frac{27}{8}\times 4=\frac{27}{2}$$

$$d=\frac{4}{3}\sqrt[3]{9}\Rightarrow d^3=\frac{64}{27}\times 9=\frac{64}{3}$$

بنابراین:

$$c^3<d^3<a^3<b^3\Rightarrow c<d<a<b$$

روش دوم:

قبل از تصمیم‌گیری ضرایب، اعداد داده شده را به توان فرجه می‌رسانیم و بعد آن‌ها را به زیر رادیکال می‌بریم، پس داریم:

$$a=2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3\times 3}=\sqrt[3]{24}$$

$$b=3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{3^3\times 2}=\sqrt[3]{54}$$

$$c=\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{(\frac{3}{2})^3\times 4}=\sqrt[3]{\frac{27}{2}}$$

$$d=\frac{4}{3}\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{(\frac{4}{3})^3\times 9}=\sqrt[3]{\frac{64}{3}}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۷ نکته: هرگاه $a>0$ و m و n اعداد طبیعی باشند، توان کسری و غیرصحیح $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

نکته : $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\quad,\quad a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$

ابتدا a و b را ساده می‌کنیم:

$$a=\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5\sqrt{2^n}}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{2^{n+10}}}}=\sqrt[24]{2^{n+10}}=2^{\frac{n+10}{24}}$$

$$b=\sqrt[3]{2^2\sqrt{2^3\sqrt{2}}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^7\sqrt{2}}}=\sqrt[12]{2^{15}}=2^{\frac{15}{12}}$$

در این صورت:

$$a=b\Rightarrow 2^{\frac{n+10}{24}}=2^{\frac{15}{12}}=2^{\frac{5}{4}}\Rightarrow\frac{n+10}{24}=\frac{5}{4}\Rightarrow n+10=30\Rightarrow n=20$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۸ نکته : $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

اگر فرض کنیم $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=A$ ، می‌توان نوشت:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=12\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در }A}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})=12A$$

$$\Rightarrow(\cancel{x}+2-\cancel{x}+1)=12A\Rightarrow 3=12A\Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۹ نکته (اتحاد مزدوج): $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

با توجه به نکته، داریم: $x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$

با توجه به این مطلب مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$A=\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=}\frac{1}{a}=a^{-1}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۰ نامساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[6]{a^5}+\sqrt[3]{a}>\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a}\Rightarrow\sqrt[6]{a^2}(\sqrt[6]{a^3}+1)>\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a^2}+1)\Rightarrow\sqrt[3]{a}\,\cancel{(\sqrt{a}+1)}>\sqrt[4]{a}\,\cancel{(\sqrt{a}+1)}$$

می‌دانیم $\sqrt[4]{a}>\sqrt[3]{a}$ می‌باشد، بنابراین $a>1$ است. در نتیجه $a^3>a^2$ بوده و سایر گزینه‌ها اشتباه می‌باشند.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۱

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{8\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2^3\times 2^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2^{\frac{10}{3}}}=\frac{1}{2}\times 2^{\frac{5}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\Rightarrow a^3=2^2=4$$

$$b=\frac{1}{2}\sqrt[4]{9\sqrt[3]{9}}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{9^{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{3}\times 9^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\times 3^{\frac{2}{3}}=3^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow b^3=3^{-1}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{a^3}{b^3}=\frac{4}{\frac{1}{3}}=12$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۲ کافیست حاصل عبارت $A=\frac{۳}{۴-\sqrt{۱۰}}-\frac{۳}{\sqrt{۱۰}-۲}$ را محاسبه کنیم.

ابتدا هر دو کسر را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۳}{\sqrt{۱۰}-۲}\times\frac{\sqrt{۱۰}+۲}{\sqrt{۱۰}+۲}=\frac{۳(\sqrt{۱۰}+۲)}{۱۰-۴}=\frac{(\sqrt{۱۰}+۲)}{۲}$$

$$\frac{۳}{۴-\sqrt{۱۰}}\times\frac{۴+\sqrt{۱۰}}{۴+\sqrt{۱۰}}=\frac{۳(۴+\sqrt{۱۰})}{۱۶-۱۰}=\frac{(۴+\sqrt{۱۰})}{۲}$$

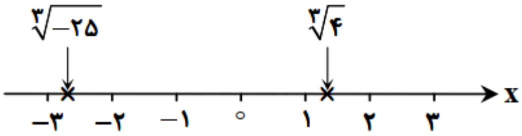
خواهیم داشت:

$$A=\frac{\sqrt{۱۰}+۲}{۲}-\frac{\sqrt{۱۰}+۴}{۲}=-۱$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۳ برای حل، از راهبرد رسم شکل استفاده کرده و محل تقریبی اعداد $\sqrt[۳]{-۲۵}$ و $\sqrt[۳]{۴}$ را روی محور اعداد حقیقی مشخص می‌کنیم:

$$۱<\sqrt[۳]{۴}<۲ \quad , \quad -۳<\sqrt[۳]{-۲۵}<-۲$$



با توجه به شکل، ۴ عدد صحیح بین این دو عدد وجود دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۴

$$\frac{(۲\times ۲^{x})(۳\times ۳^{x})}{۶^{x^۲-۴}}=\frac{۱}{۳۶}\Rightarrow\frac{(۲^{x+۱})(۳^{x+۱})}{۶^{x^۲-۴}}=\frac{۱}{۶^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۶^{x+۱}}{۶^{x^۲-۴}}=۶^{-x^۲+x+۵}=۶^{-۲}\rightarrow -x^۲+x+۵=-۲\rightarrow x^۲-x=۷$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۵ به کمک اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله ای، مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱+\sqrt[۳]{۲}}{۱+\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{۱-\sqrt[۳]{۲}}{۱-\sqrt[۳]{۲}}=\frac{(۱+\sqrt[۳]{۲})(۱-\sqrt[۳]{۲})}{(۱)^۳-(\sqrt[۳]{۲})^۳}=\frac{(۱+\sqrt[۳]{۲})(۱-\sqrt[۳]{۲})}{۱-۲}=-(۱+\sqrt[۳]{۲})(۱-\sqrt[۳]{۲})=-(۱-\sqrt[۳]{۴})=\sqrt[۳]{۴}-۱$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۶ برای حل این سوال، اطلاعات داده شده را به‌صورت ریاضی می‌نویسیم:

$$A=-\sqrt[۴]{۱۲۹۶}=-\sqrt[۴]{۶^۴}=-۶$$

$$B=\sqrt[۵]{-۲۴۳}=\sqrt[۵]{(-۳)^۵}=-۳$$

$$\rightarrow A-B=-۶-(-۳)=-۶+۳=-۳$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۷

$$\frac{۳}{\sqrt[۶]{۲\sqrt{۲۷}-۳\sqrt{۳}}}=\frac{۳}{\sqrt[۶]{۲\sqrt{۹\times ۳}-۳\sqrt{۳}}}$$

$$\frac{۳}{\sqrt[۶]{۶\sqrt{۳}-۳\sqrt{۳}}}=\frac{۳}{\sqrt[۶]{۳\sqrt{۳}}}=\frac{۳}{\sqrt[۶]{\sqrt{۳^۲\times ۳}}}=\frac{۳}{\sqrt[۱۲]{۳^۳}}=\frac{۳}{\sqrt[۴]{۳}}\Rightarrow\frac{۳}{\sqrt[۴]{۳}}\times\frac{\sqrt[۴]{۳^۳}}{\sqrt[۴]{۳^۳}}=\frac{۳\sqrt[۴]{۲۷}}{۳}=\sqrt[۴]{۲۷}\rightarrow\frac{\sqrt[۴]{۲۷}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt[۴]{۲۷}}{\sqrt[۴]{۳^۲}}=\sqrt[۴]{۳}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۸ ابتدا هر عبارت را جداگانه گویا می‌کنیم و سپس با هم جمع و تفریق می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}-1\\&\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}\\&\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=-1+2=1$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۹

$$\sqrt[6]{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}\times\sqrt[6]{10-2\sqrt{21}}\to\sqrt[6]{7+2\sqrt{21}+3}\times\sqrt[6]{10-2\sqrt{21}}$$

$$\to\sqrt[6]{10+2\sqrt{21}}\times\sqrt[6]{10-2\sqrt{21}}\to\sqrt[6]{10^2-(2\sqrt{21})^2}$$

$$\sqrt[6]{100-4(21)}=\sqrt[6]{16}=\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[3]{4}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۰

$$\frac{3\sqrt[3]{0/216}}{\sqrt[6]{(128)^3(64)^2}}=\frac{3\times\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{1000}}}{\sqrt[6]{(2^7)^3\times(2^6)^2}}=\frac{3\times\frac{\sqrt[3]{2^3\times3^3}}{\sqrt[3]{10^3}}}{\sqrt[6]{2^{21}\times2^{12}}}=\frac{3\times\frac{2\times3}{10}}{\sqrt[6]{2^{21+12}}}=\frac{\frac{18}{10}}{\sqrt[6]{2^{33}}}=\frac{\frac{9}{5}}{2^{\frac{33}{6}}}=\frac{\frac{9}{5}}{2^{\frac{11}{2}}}=\frac{\frac{9}{5}}{\frac{32\sqrt{2}}{1}}=\frac{9}{160\sqrt{2}}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{160\sqrt{2}}{9}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۱ ابتدا توان سوم اعداد a، b و c را به‌دست آورده و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases}a^3=(3\sqrt[3]{10})^3=27\times10=270\\b^3=(4\sqrt[3]{4})^3=64\times4=256\\c^3=(5\sqrt[3]{2})^3=125\times2=250\end{cases}\Rightarrow a^3>b^3>c^3\Rightarrow a>b>c$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۲ نکته: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

می‌دانیم $\sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2-14}=5$. اگر مقدار خواسته‌شده را A بنامیم، داریم:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+16}+\sqrt{x^2-14}=A\\\sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2-14}=5\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{x^2+16}+\sqrt{x^2-14})(\sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2-14})=A\times5$$

$$\Rightarrow(\sqrt{x^2+16})^2-(\sqrt{x^2-14})^2=A\times5\Rightarrow(x^2+16)-(x^2-14)=5A\Rightarrow30=5A\Rightarrow A=6$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۳ پاسخ تشریحی **گام اول:** نامساوی داده‌شده را به صورت دو نامعادلهٔ جداگانه می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x+۱<۵-x \\ ۵-x<۲x+۳ \end{cases}$$

گام دوم: هر یک از نامعادله‌ها را حل می‌کنیم:

$$۱)\ x+۱<۵-x \Rightarrow ۲x<۴ \Rightarrow x<۲$$

$$۲)\ ۵-x<۲x+۳ \Rightarrow -۳x<-۲ \Rightarrow x>\frac{۲}{۳}$$

گام سوم: اشتراک جواب‌ها را به عنوان مجموعهٔ جواب این نامعادله‌ها می‌پذیریم.

$$\left.\begin{matrix} x<۲ \\ x>\frac{۲}{۳} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} \frac{۲}{۳}<x<۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۴ پاسخ تشریحی **گام اول:** طرف اول تساوی را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\frac{۸}{\sqrt{۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۸\sqrt{۲}}{۲}=۴\sqrt{۲}$$

$$۸^{-۰/۵}=\frac{۱}{۸^{۰/۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۸}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\frac{۸}{\sqrt{۲}}-۸^{-۰/۵}=۴\sqrt{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۱۵\sqrt{۲}}{۴}=۱۵\times\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲^{۲}}=۱۵\times۲^{-\frac{۳}{۲}}$$

گام دوم: طرف دوم تساوی را نیز به صورت عبارتی توان‌دار می‌نویسیم:

$$۷/۵(\sqrt[۳]{۲})^{a}=۷/۵\times(۲^{\frac{۱}{۳}})^{a}=۷/۵\times۲^{\frac{a}{۳}}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۵ پاسخ تشریحی **گام اول:** فرض کنید $A=\sqrt{۷}-\sqrt{۶}$ باشد. حاصل عبارت $\sqrt{۷}+\sqrt{۶}$ را برحسب A محاسبه می‌کنیم:

$$(\sqrt{۷}+\sqrt{۶})(\sqrt{۷}-\sqrt{۶})=۷-۶=۱ \Rightarrow \sqrt{۷}+\sqrt{۶}=\frac{۱}{\sqrt{۷}-\sqrt{۶}}=\frac{۱}{A}$$

گام دوم: در عبارت صورت سؤال، مقادیر را برحسب A جای‌گذاری کرده و عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱+(\sqrt{۷}-\sqrt{۶})}{۱+(\sqrt{۷}+\sqrt{۶})}=\frac{۱+A}{۱+\frac{۱}{A}}=\frac{۱+A}{\frac{A+۱}{A}}=A=\sqrt{۷}-\sqrt{۶}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۶ ابتدا صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۲}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۴}{\underbrace{(\sqrt{۲}-\sqrt[۳]{۲})}(۴+\sqrt[۳]{۱۶}+۲\sqrt[۳]{۴})}\times\frac{\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۲}}{\underbrace{\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۲}}}=\frac{۴(\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۲})}{(۲-\sqrt[۳]{۴})(۴+\sqrt[۳]{۱۶}+۲\sqrt[۳]{۴})}$$

$$=\frac{۴(\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۲})}{۲^{۳}-(\sqrt[۳]{۴})^{۳}}=\frac{۴(\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۲})}{۴}=\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۲}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۷ **روش اول:**

عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A=\sqrt{۲\sqrt{۷}+\frac{۱۱}{۲}}-\sqrt{۳/۵}=\sqrt{\frac{۱۱+۴\sqrt{۷}}{۲}}-\sqrt{۳/۵}=\sqrt{\frac{\left(۲+\sqrt{۷}\right)^{۲}}{۲}}-\sqrt{۳/۵}$$
$$=\frac{۲+\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}}-\sqrt{۳/۵}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳/۵}-\sqrt{۳/۵}=\sqrt{۲}$$

روش دوم:

$$\sqrt{۲\sqrt{۷}+۲+۳/۵}=\sqrt{(\sqrt{۳/۵}+\sqrt{۲})^{۲}}=\sqrt{۳/۵}+\sqrt{۲}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۸

نکته: $(a-b)(a+b)=a^{۲}-b^{۲}$

نکته: $(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})=a^{۳}-b^{۳}$

برای ساده کردن A از اتحاد مزدوج و سپس اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$A=(\sqrt[۳]{x^{۲}}-۱)(\sqrt[۳]{x^{۲}}^{\,۲}+\sqrt[۳]{x^{۲}}\times ۱+۱)=(\sqrt[۳]{x^{۲}})^{۳}-۱=x^{۲}-۱\xrightarrow{x=\sqrt{۱+\sqrt{۵}}}(\sqrt{۱+\sqrt{۵}})^{۲}-۱=۱+\sqrt{۵}-۱=\sqrt{۵}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)